PROFMAT SBM Sociedade Brasileira de Matemática

EXAME NACIONAL DE ACESSO 2018 (21/10/2017)

[01] Se a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, é equivalente à equação $a(x+k)^2 + h = 0$, e denotando $\Delta = b^2 - 4ac$, pode-se afirmar que

(A) $k = -\dfrac{b}{2a}$ e $h = -\dfrac{\Delta}{4a}$

(B) $k = \dfrac{b}{2a}$ e $h = \dfrac{\Delta}{4a}$

(C) $k = \dfrac{\Delta}{4a}$ e $h = \dfrac{b}{2a}$

(D) $k = -\dfrac{\Delta}{4a}$ e $h = -\dfrac{b}{2a}$

(E) $k = \dfrac{b}{2a}$ e $h = -\dfrac{\Delta}{4a}$

Solução
Resposta: E

Temos que

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Portanto $k = \dfrac{b}{2a}$ e $h = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

---

[02] Já vivi cinco sétimos do tempo que falta para eu chegar aos noventa anos. Qual a minha idade?

(A) 37 anos e meio

(B) $\dfrac{450}{7}$ anos

(C) $\dfrac{180}{7}$ anos

(D) 56 anos e um quarto

(E) 7 anos e meio

Solução
Resposta: A

Seja x a minha idade. Temos que $x = \dfrac{5}{7}(90 - x)$. Logo $7x = 450 - 5x$ e assim $x = \dfrac{450}{12} = 37,5$.

---

[03] Escolhendo ao acaso três vértices de um hexágono regular, qual a probabilidade de se formar com eles um triângulo equilátero?

(A) $\dfrac{3}{5}$

(B) $\dfrac{3}{10}$

(C) $\dfrac{1}{5}$

(D) $\dfrac{1}{10}$

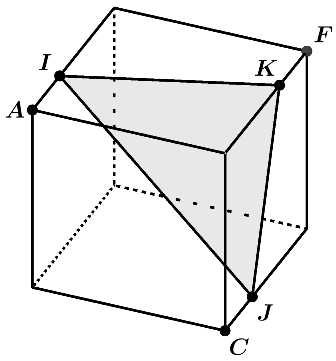
(E) $\dfrac{1}{20}$

Solução
Resposta: D

Indicamos por 1, 2, 3, 4, 5 e 6 os vértices consecutivos de um hexágono regular. O número de elementos do espaço amostral é dado por $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$.
Para se obter um triângulo equilátero temos 2 possibilidades: 1, 3, 5 ou 2, 4, 6.
Portanto a probabilidade é igual a $\dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$.

---

[04] O cubo da figura abaixo tem aresta de medida 3. Se $\overline{AI} = \overline{CJ} = \overline{FK} = 1$, o perímetro do triângulo IJK é



(A) $2\sqrt{10} + 3\sqrt{2}$

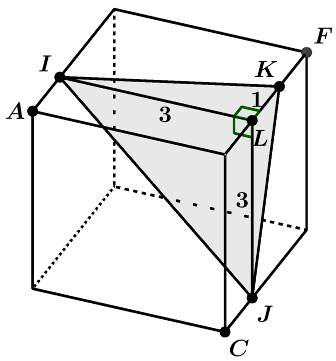
(B) $3\sqrt{10}$

(C) $9\sqrt{2}$

(D) $2\sqrt{13} + 3\sqrt{2}$

(E) $2\sqrt{10} - 3\sqrt{2}$

Solução
Resposta: A



Como $\overline{AI} = \overline{FK} = 1$, marcando o ponto L da figura acima, tal que $\overline{KL} = 1$, os trinângulos LIK e LIJ serão retângulos, e tais que

$$\overline{IK}^2 = \overline{IL}^2 + \overline{LK}^2 = 3^2 + 1^2 = 10,$$
$$\overline{IJ}^2 = \overline{IL}^2 + \overline{LJ}^2 = 3^2 + 3^2 = 18,$$

logo

$$\overline{IK} = \sqrt{10},\ \overline{IJ} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Além disso, os triângulos ILK e JLK são congruentes (triângulos retângulos com os mesmos catetos), logo

$$\overline{JK} = \overline{IK} = \sqrt{10}.$$

Assim, o perímetro do triângulo IJK é dado por

$$\overline{IK} + \overline{IJ} + \overline{JK} = \sqrt{10} + 3\sqrt{2} + \sqrt{10} = 2\sqrt{10} + 3\sqrt{2}.$$

---

[05] Um dado não viciado com seis faces numeradas de 1 a 6 é lançado três vezes. Qual a probabilidade de o produto dos resultados obtidos ser igual 20?

(A) $\frac{1}{72}$

(B) $\frac{1}{36}$

(C) $\frac{1}{24}$

(D) $\frac{1}{18}$

(E) $\frac{1}{12}$

Solução
Resposta: C

O número de casos possíveis é igual a $6^3 = 216$. Para que o produto de resultados seja igual a 20, temos duas situações favoráveis:

(i) as faces de números $1, 4$ e 5, que perfazem um total de $3! = 6$ situações, ou

(ii) as faces de números $2, 2$ e 5, que perfazem um total de 3 situações.

Logo, a probabilidade pedida é $p = \frac{9}{216} = \frac{1}{24}$.

---

[06] Um retângulo tem área igual ao quadrado da metade de sua diagonal. A razão entre o lado maior e o lado menor é igual a

(A) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

(B) $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

(C) $2-\sqrt{3}$

(D) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

(E) $2+\sqrt{3}$

Solução
Resposta: E

Sejam x e y os lados do retângulo, com $x \geqslant y$, e d a diagonal. Pelo Teorema de Pitágoras segue que $x^2 + y^2 = d^2$. Por hipótese temos que $xy = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4}$. Assim segue que $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = d^2 - 2 \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{2}$. Como $x \geqslant y$ segue que $x - y = \frac{d}{\sqrt{2}}$. Logo $x = y + \frac{d}{\sqrt{2}}$. Substituindo esse valor de x na equação que relaciona a área com a diagonal, obtemos uma equação do segundo grau em y, dada por $y^2 + \frac{d}{\sqrt{2}}y - \frac{d^2}{4} = 0$, cujas raízes são $y = \frac{d(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$ ou $y = \frac{d(-\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$. Este último valor de y não serve por ser negativo e assim $y = \frac{d(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$. Voltando à expressão de x obtemos $x = \frac{d(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$.

Portanto $\frac{x}{y} = 2 + \sqrt{3}$.

---

[07] Em outubro de 2017, três primos têm 41, 13 e 7 anos completos. Em outubro de que ano a idade de um deles será a soma das idades dos outros dois?

(A) 2027

(B) 2029

(C) 2030

(D) 2038

(E) 2053

Solução
Resposta: D

Indicando por x uma quantidade de anos, em outubro de $2017 + x$ os primos terão $41 + x, 13 + x$ e $7 + x$ anos completos.
Então, devemos ter $41 + x = (13 + x) + (7 + x)$, donde $x = 41 - 20 = 21$.
Portanto, a resposta é igual a $2017 + 21 = 2038$.

---

[08] A soma dos quadrados das raízes da equação $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ é igual a

(A) 0

(B) 5

(C) 10

(D) 20

(E) 26

Solução
Resposta: C

Tomando $y = x^2$, a equação $y^2 - 5y + 6 = 0$, possui raízes iguais a 2 e 3. As raízes da equação original serão $\pm\sqrt{2}$ e $\pm\sqrt{3}$.
Logo, a soma dos quadrados das raízes da equação $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ é igual a 10.

---

[09] Comprei garrafas de vinho, todas por um mesmo preço, pagando um total de 3600 reais, que era todo dinheiro que eu tinha. Como obtive um desconto de 20% no preço de cada garrafa, consegui comprar 10 garrafas a mais do que previra originalmente. Quantas garrafas comprei?

(A) 100

(B) 90

(C) 50

(D) 40

(E) 36

Solução
Resposta C

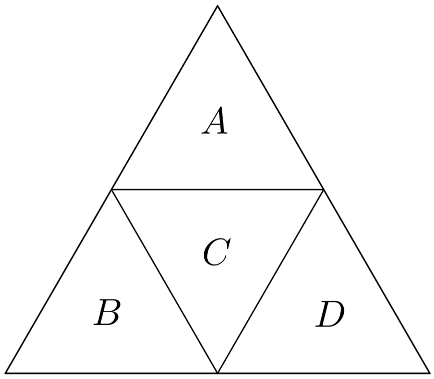
Seja p o preço de cada garrafa e x a quantidades de garrafas que seriam compradas originalmente. Temos que $p \cdot x = 3600$.
Com o desconto de 20% o preço de cada garrafa foi de $0,8 \cdot p$ e a quantidade comprada foi $x + 10$, logo

$$\begin{aligned} 0,8 \cdot p \cdot (x+10) &= 3600 \\ 0,8 \cdot \frac{3600}{x} \cdot (x+10) &= 3600 \\ 8 \cdot (x+10) &= 10x \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Portanto, comprei 50 garrafas.

---

[10] Para colorir os quatro triângulos, indicados na figura abaixo por A, B, C e D, pode-se usar uma mesma cor mais de uma vez, desde que dois triângulos com um lado em comum tenham cores diferentes. Obedecendo essa regra e usando no máximo quatro cores, de quantas maneiras distintas pode-se colorir os quatro triângulos?



(A) 96

(B) 98

(C) 104

(D) 108

(E) 128

Solução
Resposta: D

Começamos colorindo o triângulo C, o que pode ser feito de 4 modos distintos. Em seguida, podemos colorir o triângulo A de 3 modos distintos. De modo análogo, temos 3 modos distintos para colorir B e 3 modos distintos para colorir D. Portanto, a resposta é $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$.

---

[11] Em um triângulo retângulo ABC, o lado AB excede em 8 unidades o lado BC que por sua vez mede uma unidade a mais que o lado AC. A hipotenusa deste triângulo mede

(A) 20

(B) 21

(C) 25

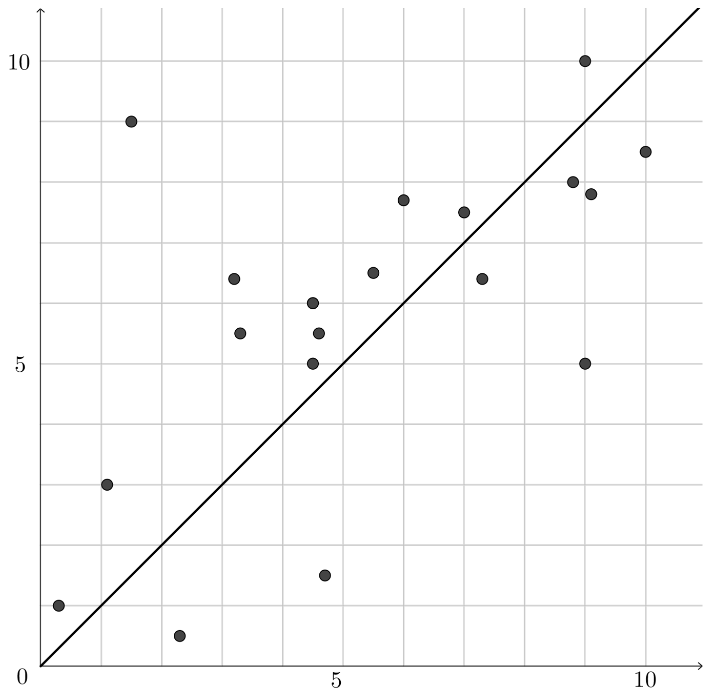
(D) 27

(E) 29

Solução
Resposta: E
Chamando $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$ e $\overline{AC} = z$, chegamos às relações $x = y + 8$, $y = z + 1$. Logo as medidas dos lados são, $z, z+1, z+9$. Aplicando o Teorema de Pitágoras temos $z^2 + (z+1)^2 = (z+9)^2$, o que nos leva a $z^2 - 16z - 80 = 0$ que tem raízes $z = 20$ ou $z = -4$. Assim a hipotenusa mede 29.

---

[12] O gráfico abaixo mostra as notas de uma determinada turma nas disciplinas de Geografia e História. No eixo horizontal estão as notas de Geografia e no eixo vertical as notas de História. Ou seja, um par ordenado (g, h) representa as notas de um mesmo aluno que obteve nota g em Geografia e h em História.



Analisando o gráfico podemos afirmar que

(A) Quatro alunos tiveram nota menor que 4 nas duas disciplinas.

(B) Dentre os que tiveram nota maior que 6 nas duas disciplinas, mais alunos tiveram melhor nota em Geografia.

(C) Todos os alunos tiveram nota melhor em História do que em Geografia.

(D) A maioria dos alunos foram melhor em Geografia do que em História.

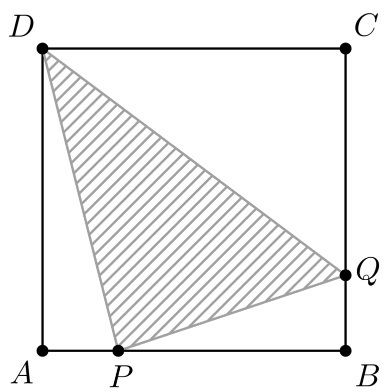
(E) Houve alunos que tiveram a mesma nota nas duas disciplinas.

Solução
Resposta: B

A região abaixo da diagonal representa os alunos que tiveram nota melhor em Geografia, isto é, $\{(g, h) \mid g > h\}$, a região acima da diagonal representa os alunos que tiveram nota melhor em História, isto é, $\{(g, h) \mid g < h\}$ e a diagonal são os alunos que tiveram a mesma nota nas duas disciplinas.
Assim, apenas três alunos tiveram nota menor que 4 nas duas disciplinas. Seis alunos tiveram nota maior do que 6 nas duas disciplinas, dos quais 4 tiveram nota melhor em Geografia.

---

[13] No quadrado $ABCD$ abaixo, de lado 8, $\overline{AP} = \overline{BQ}$.



Qual o menor valor de $\overline{AP}$ para que a área do triângulo DPQ seja igual a 28?

(A) $4-2\sqrt{11}$

(B) $-4+2\sqrt{20}$

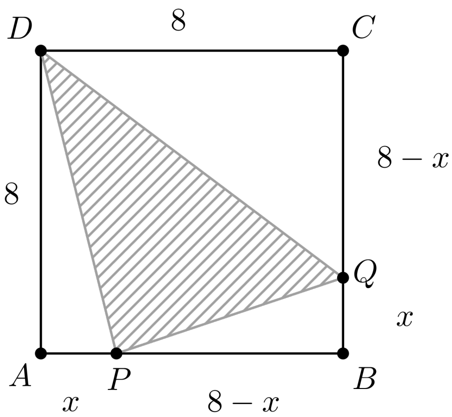
(C) $4-2\sqrt{2}$

(D) $4+2\sqrt{2}$

(E) $4+2\sqrt{11}$

Solução
Resposta: C

Chamando $\overline{AP}=\overline{BQ}=x$ temos o seguinte



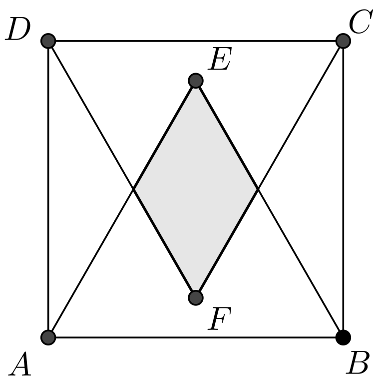
A área do triângulo DPQ pode ser calculada subtraindo do quadrado $ABCD$ as áreas dos triângulos ADP, BPQ e CDQ. Sendo assim, temos

$$\text{área}(DPQ) = 64 - \frac{1}{2}\left[8x + x(8-x) + 8(8-x)\right] = 32 - 4x + \frac{x^2}{2}.$$

Igualando a última expressão a 28 chegamos à equação $x^2-8x+8=0$ que tem raízes $4-2\sqrt{2}$ e $4+2\sqrt{2}$.
Logo, a menor distância é $4-2\sqrt{2}$.

---

[14] Sobre os lados AB e CD de um quadrado $ABCD$, e internamente a ele, são construídos os triângulos equiláteros ABE e CDF, como indicado na figura. Sendo 1cm a medida do lado do quadrado, a área do losango destacado na figura é dada por:



(A) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$

(B) $\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}$

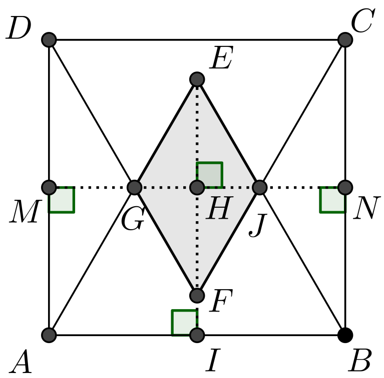
(C) $\dfrac{8\sqrt{3}-12}{3}$

(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

(E) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Solução
Resposta: A

Considere os pontos M, G, H, J e N da figura abaixo, de forma que M e N são pontos médios dos lados do quadrado sobre os quais estão.



O triângulo ADG é isósceles, pois os ângulos $G\hat{A}D = G\hat{D}A = 30°$. Com isso, $\overline{AM} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{1}{2}$. Com isso $\overline{HI} = \frac{1}{2}$.

Desta forma, como $\overline{EI} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (altura do triângulo equilátero ABE de lados de medida 1), temos

$$\overline{EH} = \overline{EI} - \overline{HI} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

O triângulo EGJ é equilátero, pois o triângulo ABE é equilátero e o lado GJ é paralelo a AB. Assim, EH é altura de um triângulo equilátero de lado GJ e, portanto

$$\overline{EH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{GJ},$$

logo

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{GJ},$$

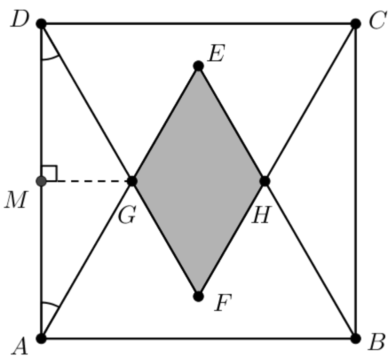
e, portanto,

$$\overline{GJ} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{área}(EGFJ) &= 2 \cdot \text{área}(EGJ) \\ &= 2 \cdot \frac{\overline{GJ} \cdot \overline{EH}}{2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \\ &= \frac{4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}. \end{aligned}$$

Solução alternativa



O triângulo ADG é isósceles, pois os ângulos $G\hat{A}D = G\hat{D}A = 30°$. Com isso, $\overline{AM} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{1}{2}$.

Como $\frac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg}(30^o) = \frac{\overline{GM}}{\overline{AM}}$, temos que $\overline{GM} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, que é a altura do triângulo ADG. Por isso sua área é igual a $\frac{\overline{AD} \cdot \overline{GM}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$, que é também a área de BCH.

Note que ainda que

$$\text{área}(ABE) = \text{área}(CDF) = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

A área do quadrado pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\text{área}(ABCD) = \text{área}(ADG) + \text{área}(BCH) + \text{área}(ABE) + \text{área}(CDF) - \text{área}(EFGH).$$

Sendo assim, temos

$$1 = \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \text{área}(EFGH).$$

O que nos leva a

$$\text{área}(EFGH) = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{4\sqrt{3}-6}{6} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}.$$

---

[15] O conjunto solução, nos reais, da inequação $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} > 1$, é:

(A) $(1, 2)$

(B) $(-\infty, 2)$

(C) $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

(D) $(2, 3)$

(E) $\varnothing$

Solução
Resposta: D
A inequação dada é equivalente a

$$\frac{x^2 - 5x + 7}{(x-2)(x-3)} < 0.$$

Como o numerador é positivo para todo x real, basta analisar quando $(x-2)(x-3) < 0$. Nesse caso temos duas situações:
(i) $x - 2 < 0$ e $x - 3 > 0$. Mas isso implicaria $x < 2$ e $x > 3$, o que é impossível.
(ii) $x - 2 > 0$ e $x - 3 < 0$. Isso implica $2 < x < 3$.

Portanto o conjunto solução é o intervalo $(2, 3)$.

---

[16] Quantos números inteiros satisfazem a inequação $(2x-1)(2x+1) < 99$?

(A) 8

(B) 9

(C) 10

(D) 11

(E) 12

Solução
Resposta: B

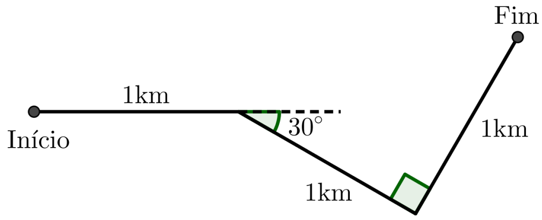
Temos que

$$(2x-1)(2x+1) < 99 \iff x^2 - 25 < 0 \iff -5 < x < 5.$$

Portanto, temos 9 números inteiros satisfazendo a inequação.

---

[17] Uma pessoa anda 1km em linha reta, depois gira 30° à sua direita e anda mais 1 km. Por fim, gira 90° à sua esquerda e anda mais 1km. A figura abaixo ilustra o deslocamento.



Qual a distância, em km, entre os pontos inicial e final deste deslocamento?

(A) $\sqrt{4+\sqrt{3}}$

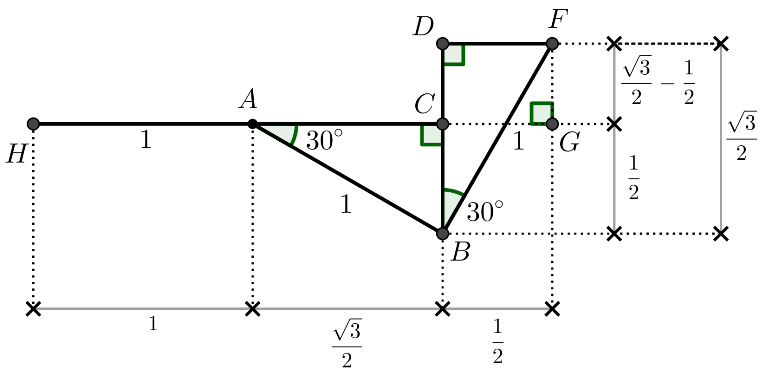
(B) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

(B) $1+\sqrt{2}$

(D) $\dfrac{\sqrt{11+2\sqrt{3}}}{2}$

(E) $\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

Solução
Resposta: A



Na figura acima, os triângulos ABC e BDF são retângulos, com $B\hat{A}C = D\hat{B}F = 30°$ e hipotenusas AB e BF de medida 1. Assim,

$$\overline{AC} = \overline{BD} = 1 \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

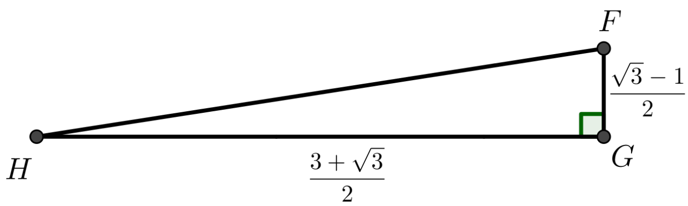
$$\overline{BC} = \overline{DF} = 1 \cdot \text{sen}\, 30° = \frac{1}{2}.$$

Com isso,

$$\overline{HG} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

$$\overline{FG} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

De acordo com a figura abaixo,



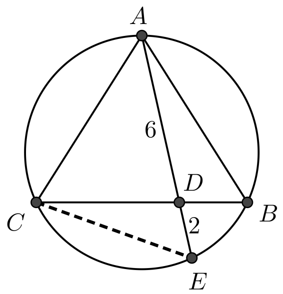
a distância $\overline{HF}$ entre os pontos de início e fim do deslocamento, é dada por

$$\begin{aligned}\overline{HF}^2 &= \overline{HG}^2 + \overline{FG}^2 \\ &= \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{9+6\sqrt{3}+3}{4} + \frac{3-2\sqrt{3}+1}{4} \\ &= \frac{16+4\sqrt{3}}{4} \\ &= 4+\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{HF} = \sqrt{4+\sqrt{3}}$.

---

[18] Pelo vértice A de um triângulo isósceles ABC, com $\overline{AB} = \overline{AC}$, é traçada uma reta que encontra BC em um ponto D e o círculo circunscrito a esse triângulo em um ponto E. Sabendo que as medidas de DE e AD são respectivamente 2 e 6, a medida de AC é igual a



(A) $4\sqrt{3}$

(B) $2\sqrt{3}$

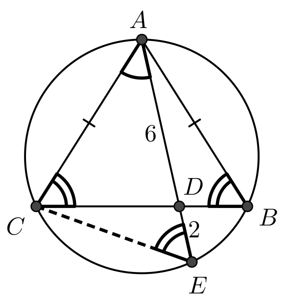
(C) $4\sqrt{2}$

(D) $6\sqrt{2}$

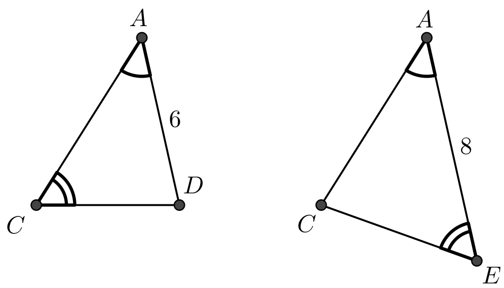
(E) $3\sqrt{3}$

Solução
Resposta: A

Como o triângulo ABC é isósceles, temos $A\hat{B}C = A\hat{C}B$. Como $A\hat{B}C$ e $A\hat{E}C$ são ângulos inscritos e determinam o mesmo arco AB, temos $A\hat{B}C = A\hat{E}C$. Com isso, $A\hat{E}C = A\hat{C}B$, como mostra a figura abaixo.



Desta forma, os triângulos ACD e AEC são semelhantes.



Teremos então

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}},$$

logo

$$\frac{\overline{AC}}{8} = \frac{6}{\overline{AC}},$$

e portanto

$$\overline{AC}^2 = 6 \cdot 8,$$

o que nos dá

$$\overline{AC} = 4\sqrt{3}.$$

---

[19] Sabendo que

$$\begin{cases} 1 + \cos x = a \cdot \operatorname{sen} x \\ 1 - \cos x = b \cdot \operatorname{sen} x \end{cases}$$

onde a e b são números reais e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, podemos afirmar que

(A) $a + b = 2$

(B) $a + b = -2$

(C) $a^2 + b^2 = 2$

(D) $a^2 - b^2 = 0$

(E) $a \cdot b = 1$

Solução
Resposta: E

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos que $\operatorname{sen} x \neq 0$ e assim $a = \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}$ e $b = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$.

Portanto $a \cdot b = \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = 1.$

---

[20] No ano passado uma turma tinha 31 estudantes. Neste ano o número de meninas aumentou em 20% e o número de meninos diminuiu em 25%. Como resultado, a turma deste ano tem um estudante a menos. Qual o percentual de meninas na turma deste ano?

(A) 20%

(B) 30%

(C) 40%

(D) 50%

(E) 60%

Solução
Resposta: E
Sejam x o número de meninas e y o número de meninos da turma do ano passado. Segue que

$$\begin{cases} x + y = 31 \\ 1,2x + 0,75y = 30. \end{cases}$$

Logo $x = 15$ e a quantidade de meninas deste ano é $1,2x = 18$. Portanto o percentual corresponde a $\frac{18}{30} = 60\%$.

---

[21] Uma grandeza G, que depende das variáveis x, y e z, é diretamente proporcional ao quadrado de x, diretamente proporcional à quarta potência de y e inversamente proporcional ao cubo de z. Se as três grandezas x, y e z dobrarem de valor, pode-se dizer que G

(A) terá seu valor multiplicado por 512.

(B) terá seu valor multiplicado por 8.

(C) terá seu valor multiplicado por 2.

(D) não muda de valor.

(E) terá seu valor reduzido à metade.

Solução
Resposta: B

Temos que $G = k \cdot \frac{x^2y^4}{z^3}$. Nas condições do problema a grandeza G será multiplicada por $\frac{2^2 \cdot 2^4}{2^3} = 8$.

---

[22] Em uma fila de cinco pessoas, todas com alturas diferentes, qual a probabilidade de as duas pessoas mais altas ocuparem os dois primeiros lugares da fila?

(A) $\frac{3}{10}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{10}$

(D) $\frac{1}{20}$

(E) $\frac{1}{60}$

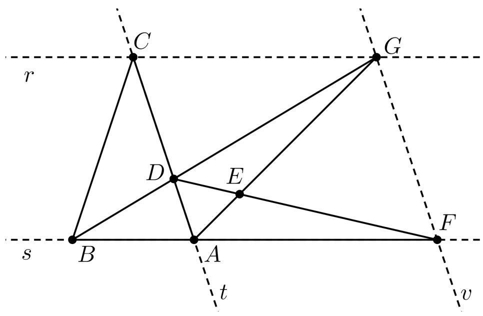
Solução
Resposta: C

Digamos que a pessoa mais alta seja A e a segunda mais alta seja B. Com cinco pessoas é possível formar $5! = 120$ filas. Dessas, temos $3! = 6$ em que A está em primeiro e B em segundo, e 6 em que B está em primeiro e A em segundo. Com isso a probabilidade de que as duas mais altas ocupem os dois primeiros lugares é igual a

$$\frac{6+6}{120} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}.$$

---

[23] Na figura abaixo, r é paralela a s, t é paralela a v, D é a interseção de BG com AC e E é a interseção de DF com AG.



Se as áreas dos triângulos ADE e BCD são, respectivamente, 1 e 3, a área do triângulo AEF é igual a

(A) 1

(B) 2

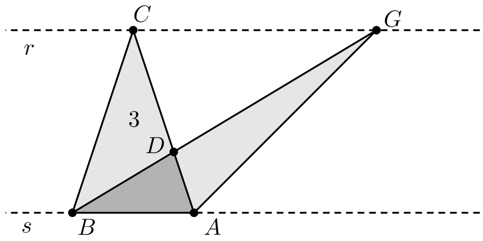
(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solução
Resposta: B

Como as retas r e s são paralelas, os triângulos ABC e ABG têm mesma altura. E, como possuem a mesma base AB, suas áreas serão iguais. Assim, de acordo com a figura abaixo,



temos área$(ABD) + 3 =$ área$(ABD) +$ área(ADG), logo área$(ADG) = 3$. E, como

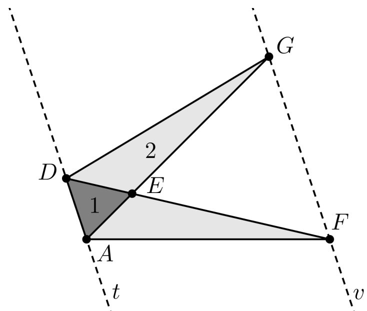
$$\text{área}(ADG) = \text{área}(ADE) + \text{área}(DEG),$$

temos

$$3 = 1 + \text{área}(DEG),$$

logo área$(DEG) = 2$.

Os triângulos ADF e ADG têm mesma base AD e mesma altura, pois as retas t e v são paralelas. Com isso, suas áreas serão iguais, e, pela figura abaixo,



temos

$$\text{área}(ADE) + \text{área}(DEG) = \text{área}(ADE) + \text{área}(AEF),$$

logo

$$1 + 2 = 1 + \text{área}(AEF),$$

portanto

$$\text{área}(AEF) = 2.$$

---

[24] I. O triângulo de lados $4, 8$ e 9 é acutângulo

PORQUE

II. $4^2 + 8^2 < 9^2$.

A respeito dessas asserções, assinale a alternativa correta.

(A) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I.

(B) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.

(C) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.

(D) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.

(E) As assserções I e II são proposições falsas.

Solução
Resposta: D

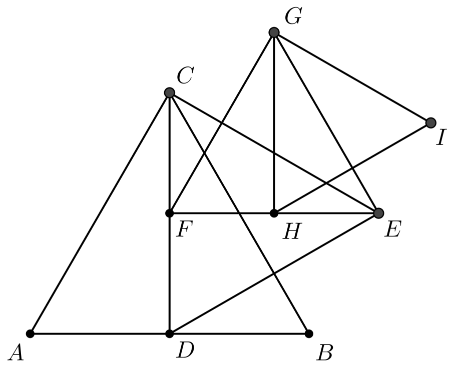
Num triângulo, o maior lado é oposto ao maior ângulo. Sejam $a = 9, b = 8$ e $c = 4$ e $\hat{A}$ o maior ângulo do triângulo (oposto ao lado de comprimento 9). Pela lei dos cossenos temos que

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{64 + 16 - 81}{2 \cdot 8 \cdot 4} = -\frac{1}{64} < 0.$$

Portanto o ângulo $\hat{A}$ é obtuso e o triângulo é obtusângulo. Assim a asserção I é falsa.

A asserção II é claramente verdadeira.

[25] Na figura, os triângulos ABC, CDE, EFG e GHI são equiláteros, sendo CD uma altura de ABC, EF uma altura de CDE e GH uma altura de EFG. Se $\overline{AB} = 1$, a medida $\overline{GI}$ é igual a



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $\dfrac{3}{4}$

(C) $\dfrac{9}{16}$

(D) $\dfrac{27}{64}$

(E) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

Solução
Resposta: E

Como CD é a altura do triângulo equilátero ABC de lado 1, temos que

$$\overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Agora EF é a altura do triângulo equilátero CDE de lado $\overline{CD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e assim

$$\overline{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

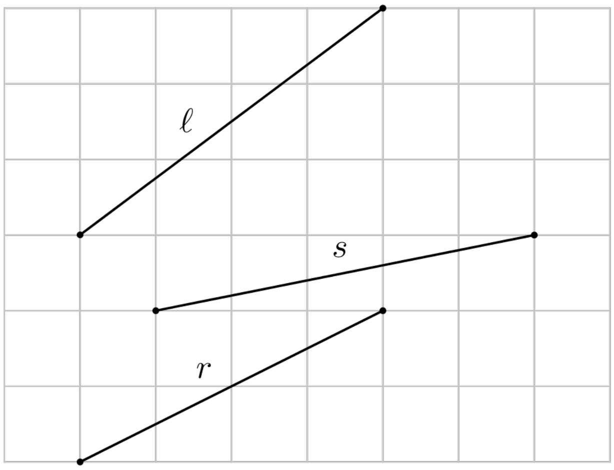
Da mesma forma, GH é a altura do triângulo equilátero EFG de lado $\overline{EF}$, logo

$$\overline{GH} = d\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{GH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

Logo $\overline{GI} = \overline{GH}$ e portanto

$$\overline{GI} = \overline{GH} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

[26] Na figura abaixo temos três segmentos dispostos em uma malha formada por quadrados congruentes. Sobre os comprimentos ℓ, r e s dos três segmentos é correto afirmar que:



(A) $s < \ell < r$

(B) $s = r < \ell$

(C) $r = \ell < s$

(D) $r < \ell < s$

(E) $r < \ell = s$

Solução
Resposta: D
Os três segmentos são hipotenusas de triângulos retângulos com vértices na malha.
Os catetos do triângulo com hipotenusa ℓ medem 3 e 4, logo $\ell = \sqrt{25}$.
Os catetos correspondentes à hipotenusa s medem 1 e 5, logo $s = \sqrt{26}$.
Os catetos do triângulo com hipotenusa r medem 2 e 4, logo $r = \sqrt{20}$.
Então, $r < \ell < s$.

---

[27] Quantos números distintos de 8 dígitos é possível formar usando dois algarismos 1 e seis algarismos 2?

(A) 12

(B) 24

(C) 28

(D) 32

(E) 256

Solução
Resposta: C

A distribuição dos 8 algarismos é dado por 8!. Como existem dois algarismos 1 e seis algarismos 2, temos que a resposta é $\dfrac{8!}{6!2!} = 28$.

Outra solução:

Basta escolher as posições dos algarismos 1, ou seja, $\binom{8}{2}$ e assim as posições dos algarismos 2 ficarão definidas.
Logo, a resposta é $\binom{8}{2} = 28$.

---

[28] No começo de um experimento, a quantidade de bactérias de uma amostra é igual a P_0. A cada hora, esta população aumenta em 20%. A expressão que fornece a população $P(t)$, quando decorridas exatamente t horas do início do experimento, para t inteiro positivo é

(A) $P(t) = P_0 \cdot (1,2)^t$

(B) $P(t) = P_0 \cdot 1,2\,t$

(C) $P(t) = P_0 \cdot (0,2)^t$

(D) $P(t) = P_0 + 1,2\,t$

(E) $P(t) = P_0 + 0,2\,t$

Solução
Resposta: A
A população ao final de uma hora é $P(1) = P_0 + 20\%P_0 = 1{,}2 \cdot P_0$. Ao final de 2 horas teremos $P(2) = 1{,}2 \cdot P(1) = P_0 \cdot (1{,}2)^2$. Analogamente, ao final de 3 horas teremos, $P(3) = P_0 \cdot (1{,}2)^3$. Assim, teremos $P(t) = P_0 \cdot (1{,}2)^t$.

---

[29] Se a é um número real tal que $0 < a < 1$, qual dos números abaixo é o maior?

(A) $\sqrt[3]{a^2}$

(B) $\sqrt[3]{a}$

(C) $\sqrt{a}$

(D) a

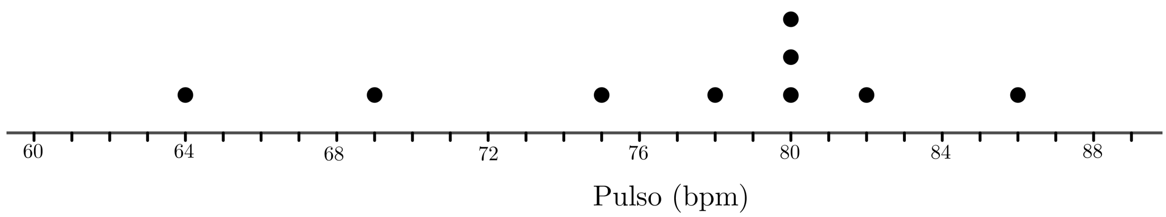
(E) a^2

Solução
Resposta: B

Como $0 < a < 1$ segue que $a^2 < a$ e $a^3 < a^2$. Logo temos que $a^3 < a^2 < a$.
Agora aplicando a raiz cúbica e a raiz sexta, respectivamente, vemos que $\sqrt[3]{a^3} < \sqrt[3]{a^2} < \sqrt[3]{a}$ e $\sqrt[6]{a^3} < \sqrt[6]{a^2}$.
Portanto já temos que $a^2 < a < \sqrt[3]{a^2} < \sqrt[3]{a}$ e $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$ e assim $\sqrt[3]{a}$ é o maior valor.

---

[30] Nas últimas seis horas, Angélica mediu onze vezes os seus batimentos cardíacos através do seu pulso e obteve os resultados apresentados em batimentos por minuto (bpm) no seguinte diagrama de pontos:



Sobre os dados obtidos por Angélica é correto afirmar que:

(A) A média é igual a 78,5 bpm.

(B) A moda é igual à mediana.

(C) A mediana é igual à média.

(D) A mediana é menor que a média.

(E) A moda, a média e a mediana são iguais.

Solução
Resposta: (QUESTÃO ANULADA)